

# Variedad estable sobre conjuntos hiperbólicos

Joel Mendoza\*

Departamento de Ciencias, Sección de matemáticas  
Pontificia Universidad Católica del Perú  
Perú

10 de enero de 2018

## Resumen

En este artículo, se demuestra que el conjunto estable e inestable asociado a un conjunto hiperbólico posee estructura de variedad diferenciable. Para esto se reduce el problema a encontrar la variedad estable de un punto hiperbólico en un espacio de Banach adecuado.

*Palabras clave:* variedad estable, punto hiperbólico, conjunto hiperbólico

## Abstract

In this article, it is demonstrated that the stable and unstable set associated with a hyperbolic set has structure of differentiable manifold. For this the problem to find the stable manifold of a hyperbolic point in a suitable Banach space is reduced.

*Keywords:* stable manifold, hyperbolic point, hyperbolic set

## 1. Introducción

El presente trabajo comunica la demostración del teorema de variedad estable para un conjunto hiperbólico. Para la construcción de estos conjuntos puede consultar [3], [2], [6]. Seguiremos el camino dado en [6].

La idea de la prueba será reducir el problema de encontrar la variedad estable para un conjunto hiperbólico a encontrar la variedad estable para un punto hiperbólico en un espacio de Banach adecuado.

El propósito principal es la prueba del siguiente teorema

**Teorema 1.1.** *Sean  $f$  un difeomorfismo de  $M$ , y  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico cerrado para  $f$  el cual está con la métrica adaptada. Entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que para cada  $x \in W_\epsilon^s(x, f)$  es un disco incrustado de dimensión igual a la dimensión de  $E_x^s$ ; más aún,  $T_x W_\epsilon^s(x) = E_x^s$ , y similarmente para el caso inestable.*

*Los discos estable e inestable también satisface lo siguiente :*

---

\*Magister en matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú

1.

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \quad \forall y \in W_\epsilon^s(x), \quad \forall n \geq 0,$$

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \quad \forall y \in W_\epsilon^u(x), \quad \forall n \geq 0,$$

donde  $\lambda < 1$  es tal que  $\|Df|_{E^s}\| < \lambda$  y  $\|(Df|_{E^u})^{-1}\| < \lambda$ .

2. La incrustación de  $W_\epsilon^{u(\text{resp. } s)}(x, f)$  varía continuamente con  $x$ . Más precisamente, si  $f$  es  $C^r$  y  $n = \dim E^s$ , entonces existe una vecindad  $U$  de  $x$  y una aplicación continua

$$\Theta : U \rightarrow \text{Emb}^r(D^n, M)$$

tal que  $\Theta(y)(0) = y$ ,  $\Theta(y)(D^n) = W_\epsilon^s(y, f)$ ,  $\forall y \in U$ .

3.

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{y : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon; \forall n \geq 0\},$$

$$W_\epsilon^u(x, f) = \{y : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \epsilon; \forall n \leq 0\}.$$

4. La variedad  $W_\epsilon^{u(\text{resp. } s)}(x, f)$  es tan suave como  $f$ .

## 2. Materiales y métodos

### 2.1. Preliminares

En esta sección se introduce el alfabeto adecuado para desarrollar el presente tema.

**Definición 2.1.** Un conjunto invariante tiene **estructura hiperbólica** para un difeomorfismo  $f$  en  $M$  si:

- (i) En cada punto  $p \in \Lambda$ , se cumple  $T_p M = \mathbb{E}_p^u \oplus \mathbb{E}_p^s$ , el espacio tangente a  $M$  se descompone como la suma de  $\mathbb{E}_p^u$  y  $\mathbb{E}_p^s$ .
- (ii) Esta descomposición es invariante mediante la aplicación derivada en el sentido que  $Df_p(\mathbb{E}_p^u) = E_{f(p)}^u$  y  $Df_p(\mathbb{E}_p^s) = E_{f(p)}^s$ .
- (iii) Existen  $0 < \lambda < 1$  y  $C \geq 1$  independientes de  $p$  tales que  $\forall n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |Df_p^n v^s| &\leq C \lambda^n |v^s|, \quad \forall v^s \in \mathbb{E}_p^s, \quad \text{y} \\ |Df_p^{-n} v^u| &\leq C \lambda^n |v^u|, \quad \forall v^u \in \mathbb{E}_p^u. \end{aligned}$$

Si el conjunto invariante  $\Lambda$  tiene estructura hiperbólica para  $f$ . También se dice que  $\Lambda$  es un **conjunto (invariante) hiperbólico**.

Además denotemos por  $\Lambda$  un conjunto cerrado en  $M$ ,  $E = TM$  el fibrado tangente sobre  $\Lambda$ , se denota por  $\Gamma^0(\Lambda, E)$  el espacio de secciones continuas de  $E$  y por  $\Gamma^b(\Lambda, E)$  el espacio de secciones acotadas, estos dos espacios tienen estructura natural de fibrado vectorial.<sup>1</sup> El espacio  $\Gamma^0(\Lambda, E) \subset \Gamma^b(\Lambda, E)$  pues  $M$  y  $\Lambda$  son compactos. La norma del supremo en  $\Gamma^b(\Lambda, E)$  es definida por  $\|h\| = \sup_{x \in \Lambda} \|h(x)\|$ . Esta norma hace de  $\Gamma^0(\Lambda, E)$

un espacio de Banach. El conjunto  $\Gamma^0(\Lambda, E)$  es cerrado en  $\Gamma^b(\Lambda, E)$  pues el límite uniforme de funciones continuas es continua.

---

<sup>1</sup>ver [4]

**Definición 2.2.** Sea  $f$  un homeomorfismo de  $M$  y  $\Lambda$  un conjunto cerrado,  $f$ -invariante. Si  $f$  es de clase  $C^1$  se define el automorfismo:

$$\begin{aligned} f_{\#} : \Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M) &\rightarrow \Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M) \\ h &\mapsto Df \cdot h \cdot f^{-1} \end{aligned}$$

es decir,  $(f_{\#}(h))(x) = Df_{f^{-1}(x)}(h(f^{-1}(x)))$

**Lema 2.3.** Sea  $f_{\#} : h \mapsto Df \cdot h \cdot f^{-1}$ , ver definición 2.2, entonces se verifica lo siguiente:

- a) Si  $f$  es  $C^1$ , el automorfismo  $Df$  de  $TM$  es  $C^0$ , entonces  $f_{\#}$  envía  $\Gamma^0(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  en  $\Gamma^0(\Lambda, T_{\Lambda}M)$ .
- b)  $f_{\#}$  es una función continua de  $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  en  $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  y además  $\|f_{\#}\| = \|Df\|$ .

*Demostración.* La prueba de (a) es solo aplicar la definición. Para la prueba de (b) se consideran  $h_1, h_2$  en  $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  tal que  $\|h_1 - h_2\| \leq \frac{\epsilon}{\lambda}$  así se tiene

$$\begin{aligned} \|f_{\#}h_1 - f_{\#}h_2\| &= \|(f_{\#}(h_1))(x) - (f_{\#}(h_2))(y)\| \\ &= \|Df_{f^{-1}(x)}(h_1(f^{-1}(x))) - Df_{f^{-1}(y)}(h_2(f^{-1}(y)))\| \\ &\leq \|Df_z\| \|h_1(f^{-1}(x)) - h_2(f^{-1}(y))\|, \quad z \in [f^{-1}(x), f^{-1}(y)] \\ &\leq \lambda \left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Con esto se ha probado que  $f_{\#}$  es continua, además de la definición de  $f_{\#}$  se tiene que  $\|f_{\#}\| = \|Df\|$ . Esto termina la demostración.  $\square$

**Proposición 2.4.** Sean  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo  $C^1$ ,  $\Lambda$  un conjunto cerrado, invariante por  $f$ .  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico para  $f$  si y solo si  $f_{\#}$  es una aplicación lineal hiperbólica<sup>2</sup>.

DEMOSTRACIÓN.

[ $\Rightarrow$ ] Si  $\Lambda$  es hiperbólico para  $f$ , entonces el espacio vectorial  $\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)$  admite una descomposición hiperbólica para  $f_{\#}$

$$\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M) = \Gamma^b(\Lambda, E^s) \oplus \Gamma^b(\Lambda, E^u),$$

es decir,  $f_{\#}$  es una aplicación lineal hiperbólica.

[ $\Leftarrow$ ] Como  $f_{\#}$  es una aplicación lineal hiperbólica, entonces se tiene que

$$\Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M) = E^s \oplus E^u$$

es una descomposición hiperbólica para  $f_{\#}$ .

Se construye una descomposición hiperbólica para  $T_{\Lambda}M$  como sigue

$$E_x^s = E^s(x) = \{g_s(x) : g_s \in E^s\} \subset T_{\Lambda}M,$$

$$E_x^u = E^u(x) = \{g_u(x) : g_u \in E^u\} \subset T_{\Lambda}M$$

de donde se tiene que

$$T_x M = E_x^s \oplus E_x^u = \{g(x) : g \in \Gamma^b(\Lambda, T_{\Lambda}M)\}, \quad \text{para cada } x \in \Lambda.$$

Por lo tanto  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico para  $f$ .  $\square$

<sup>2</sup>Ver [3, 5]

## 2.2. La aplicación exponencial

Se define el espacio

$$B(\Lambda, M) = \{h : \Lambda \rightarrow M; h \text{ es acotada } \},$$

este es una variedad diferenciable sobre el espacio de campos vectoriales acotados (secciones del fibrado tangente)  $\Gamma^b(\Lambda, T_\Lambda M)$ .

También se define la aplicación  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  como sigue: Ver [4].

- a)  $D(\exp_x)(0) = id$ ,
- b) Envía líneas en  $T_x M$  que pasan por el origen en geodésicas en  $M$  que pasan por  $x$ ,
- c) Envía bolas en  $T_x M$  cerca del origen en bolas en  $M$  cerca de  $x$ ,
- d)  $d(\exp_x x_i, x) = \|x_i\|$  para  $x_i$  suficientemente pequeño en  $T_x M$ .

En (c) aún vale algo más esto sigue de (a) se tiene por el teorema de la aplicación inversa que para  $\delta$  suficientemente pequeño es un difeomorfismo sobreyectivo de  $B(0, \delta)$  en  $B(x, \delta)$  y cuando  $M$  es compacto  $\delta$  no depende de  $x$ . En este caso, la aplicación exponencial es un difeomorfismo de una vecindad de la sección cero del fibrado tangente sobre una vecindad de la diagonal en  $M \times M$  :

$$\exp : u \mapsto (m, \exp_m(u)), \quad u \in T_m(M).$$

### 2.2.1. Cartas sobre $B(\Lambda, M)$

Sean

$$\text{inc}(\Lambda) \text{ la inclusión de } \Lambda \text{ en } M (x \mapsto x),$$

$U_\delta$  la vecindad de  $\text{inc}(\Lambda)$  en  $B(\Lambda, M)$ , es decir,

$$U_\delta = \{g \in B(\Lambda, M) : d(g(x), x) \leq \delta, \quad \forall x \in \Lambda\}.$$

La carta  $\Phi$  está definida por:

$$\begin{aligned} \Phi : U_\delta &\rightarrow \Gamma_\delta^b(\Lambda, TM) \subset \Gamma^b(\Lambda, TM) \\ h &\mapsto \Phi(h) = \exp^{-1}(\text{gráfico}(h)). \end{aligned}$$

$\Phi(h)$  es la sección dada por  $\Phi(h)(x) = \exp_x^{-1}(h(x))$ , esto es,

$$\Phi(h)(x) = \exp^{-1}(x, h(x)).$$

Además se nota que  $\Phi(\text{inc}(\Lambda)) = \exp_x^{-1}(x)$ , es decir,  $\Phi(\text{inc}(\Lambda))$  es la sección cero, la cual es denotada por  $\tilde{0}$ .

### 2.2.2. Aplicación de la exponencial y la variedad estable local de $\tilde{0}$

**Definición 2.5.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana y  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo.

- a) Se define el automorfismo de  $B(\Lambda, M)$  asociado a  $f$ ,  $\hat{F}$ , como

$$\hat{F} = fhf^{-1}.$$

- b) Con cartas exponencial, es suficiente estudiar  $\tilde{F}$  definida en una vecindad de la sección cero definida por

$$\tilde{F} = \Phi \hat{F} \Phi^{-1}.$$

*Observación 2.6.*

- a) La inclusión  $\text{inc}(\Lambda)$  es un punto fijo para  $\hat{F}$ . (ver la acción de  $\hat{F}$  y  $\tilde{F}$  en la figura 1). Se probará que  $\text{inc}(\Lambda)$  es, en efecto, un punto fijo hiperbólico para  $\hat{F}$ .
- b) La imagen de la sección  $\sigma$  de  $\Gamma_\eta^b(\Lambda, TM)$ , para  $\eta < \delta$ , es la sección

$$\tilde{F}(\sigma)(x) = \exp_x^{-1}(f(\exp_{f^{-1}(x)}(\sigma(f^{-1}(x))))),$$

ver figura 3.

Figura 1: Acción de  $\hat{F}$  y  $\tilde{F}$

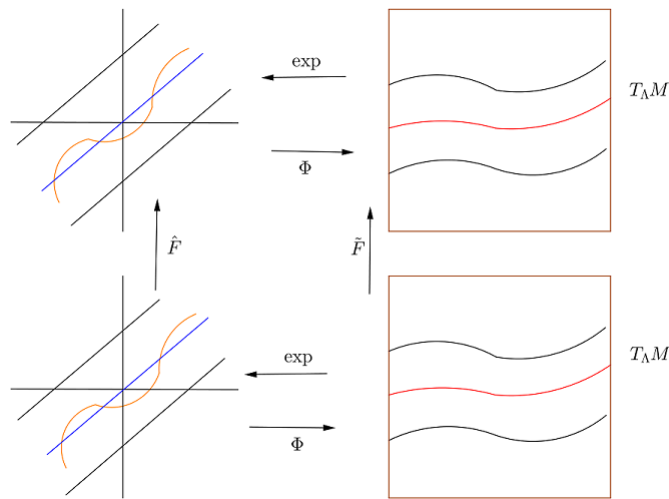
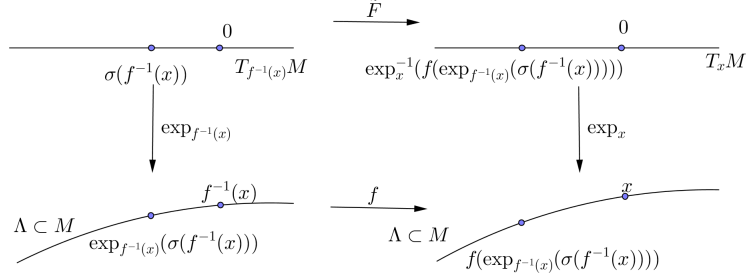


Figura 2: Forma local de  $\hat{F}$

$$\begin{array}{ccc}
 U(\text{inc}(\Lambda)) & \xrightarrow{\hat{F}} & B(\Lambda, M) \\
 \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\
 \Gamma_\delta^b(\Lambda, TM) & \xrightarrow{\tilde{F}} & \Gamma_\delta^b(\Lambda, TM)
 \end{array}$$

Figura 3: Acción de  $\tilde{F}$



**Lema 2.7.** Sean  $M$  una variedad Riemanniana,  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo y  $\Lambda$  un conjunto hiperbólico respecto a  $f$ , además  $\hat{F}$  y  $\tilde{F}$  dadas en la definición 2.5. Entonces se obtiene lo siguiente:

- a) La aplicación  $\tilde{F}$  es tan suave como  $f$  y tiene por derivada en  $\tilde{0}$  al automorfismo  $f_{\#} = D_{\tilde{0}}\tilde{F}$  de  $\Gamma^b(\Lambda, TM)$  definido por

$$f_{\#}(\sigma) = Df \cdot \sigma \cdot f^{-1}.$$

- b)  $\text{inc}(\Lambda)$ , la inclusión de  $\Lambda$  en  $M$  ( $x \mapsto x$ ), es un punto fijo hiperbólico para  $\tilde{F}$ .

*Demostración.* Para la prueba del ítem (a) se considera lo siguiente

$$\begin{aligned} D\tilde{F} &= D(\exp_x^{-1})(f(\exp_{f^{-1}(x)}(\sigma(f^{-1}(x))))) \cdot Df(\exp_{f^{-1}(x)}(\sigma(f^{-1}(x)))) \\ &\quad \cdot D(\exp_{f^{-1}(x)})(\sigma(f^{-1}(x))) \cdot D(\sigma)(f^{-1}(x)) \cdot D(f^{-1}(x)), \end{aligned}$$

al evaluar  $D\tilde{F}$  en la sección cero,  $\tilde{0}$ , y usar el hecho que  $D(\exp_x)(\tilde{0}) = \text{id}$  se tiene:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{0}}\tilde{F} &= Df(\sigma(f^{-1}(x))) \cdot D\sigma(f^{-1}(x)) \cdot Df^{-1}(x) \\ &= Df \cdot \sigma \cdot f^{-1}, \end{aligned}$$

con lo cual  $D_{\tilde{0}}\tilde{F} = Df \cdot \sigma \cdot f^{-1} = f_{\#}$ , esto prueba el ítem (a).

Para la prueba del ítem (b) se tiene que  $\Lambda$  es un conjunto hiperbólico para  $f$ , luego por el lema 2.4 que  $f_{\#}$  es una aplicación lineal hiperbólica, entonces  $\tilde{0}$  es un punto fijo hiperbólico para  $\tilde{F}$ . Por lo tanto  $\text{inc}(\Lambda)$  es un punto fijo hiperbólico para  $\tilde{F}$ . Esto termina la prueba del ítem (b) y por lo tanto del lema.  $\square$

*Observación 2.8.* Bajo las hipótesis del lema 2.7, el fibrado  $\Gamma^b(\Lambda, TM)$  tiene la siguiente descomposición hiperbólica para  $f_{\#} = D_{\tilde{0}}\tilde{F}$ :

$$\Gamma^b(\Lambda, TM) = \Gamma^b(\Lambda, E^s) \oplus \Gamma^b(\Lambda, E^u),$$

donde  $T_{\Lambda}M = E^s \oplus E^u$  es una descomposición hiperbólica de  $TM$  para  $f$ .

### 2.3. La variedad estable de $\tilde{0}$ .

Al aplicar el teorema de la variedad estable para un punto fijo hiperbólico (ver [3], [6]) a  $\tilde{0}$  se tiene que existe una variedad invariante para  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F})$ , la cual es el gráfico de una función  $C^r$ :

$$\psi : \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s) \rightarrow \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^u).$$

La variedad estable  $\tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F})$  está definida con la norma  $\| \cdot \|'$  sobre

$$\Gamma^b(\Lambda, TM) = \Gamma^b(\Lambda, E^s) \oplus \Gamma^b(\Lambda, E^u)$$

definida por

$$\|(x^s, x^u)\|' = \max(\|x^s\|, \|x^u\|).$$

La variedad estable  $\tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F})$  satisface

$$\tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F}) = \{\sigma \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, TM) : \tilde{F}^n(\sigma) \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, TM), \forall n \geq 0\},$$

donde

$$\text{si } \tau \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s), \text{ entonces } \phi(\tau) \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^u) \quad (1)$$

es la única sección del fibrado inestable que satisface:

$$(\tilde{F})^n(\tau, \psi(\tau)) \in B'_\eta(\tilde{0}), \forall n \geq 0,$$

donde  $B'_\eta(\tilde{0})$  es la bola de radio  $\eta$  centrada en  $\tilde{0}$  en  $\Gamma_\eta^b(\Lambda, TM)$  con la norma  $\| \cdot \|'$ .

Al regresar a la norma  $\| \cdot \|$  sobre  $\Gamma^b(\Lambda, TM)$  inducida por la métrica Riemanniana en  $M$ , se tiene

$$W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F}) = \{\sigma \in \Gamma^b(\Lambda, TM) : \|\tilde{F}^n(\sigma)\| \leq \epsilon, \forall n \geq 0\}.$$

Desde que las normas  $\| \cdot \|$  y  $\| \cdot \|'$  son equivalentes se tiene que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,

$$W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F}) \subset \tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F}).$$

**Lema 2.9.** *Se tiene:*

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{\exp_x(\sigma(x)) : \sigma \in W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F})\} = \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}$$

$$[W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F}) \subset \Gamma^b(\Lambda, TM); W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda)) \subset B(\Lambda, M)]$$

DEMOSTRACIÓN. Aquí se probará que

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}$$

$$(a) W_\epsilon^s(x, f) \supset \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}.$$

En efecto: Sea  $h$  un punto en la variedad estable  $W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$ , por definición la sucesión  $\hat{F}^n(h) \rightarrow \text{inc}(\Lambda)$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , esto es:

$$\sup_{z \in \Lambda} d[\hat{F}^n(h)(z), \hat{F}^n(\text{inc})(z)] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Además desde que  $\text{inc}(\Lambda)$  es un punto fijo para  $\hat{F}$  se tiene:

$$\sup_{z \in \Lambda} d[\hat{F}^n(h)(z), z] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty,$$

de la definición de  $\hat{F}$  se tiene que  $\hat{F}^n = f^n h f^{-n}$ , al reemplazar esto resulta

$$\sup_{z \in \Lambda} d[f^n h f^{-n}(z), z] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty,$$

luego al usar la continuidad de  $f^n$  se sigue que

$$\sup_{z \in \Lambda} d[f^n h(z), f^n(z)] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow +\infty.$$

Por lo tanto  $h(z) \in W_\epsilon^s(z, f)$ .

$$(b) W_\epsilon^s(x, f) \subset \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}.$$

En efecto: Sea  $y \in W_\epsilon^s(x, f)$ , es decir,  $d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Lo que se debe probar es la existencia de una función que pertenezca a  $W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$  tal que la imagen de  $x$  bajo esta función resulte  $y$ .

Esta función se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \delta_x^y(x) &= y, \\ \delta_x^y(z) &= z, \quad \forall z \neq x, \end{aligned}$$

es claro que  $\delta_x^y \in B(\Lambda, M)$ .

Además se observa que:

$$\hat{F}(\delta_x^y(z)) = f \circ \delta_x^y \circ f^{-1}(z) = \begin{cases} z & ; \quad x \neq f^{-1}(z), \\ f(y) & ; \quad x = f^{-1}(z), \end{cases}$$

lo que implica

$$\hat{F}(\delta_x^y(z)) = f \circ \delta_x^y \circ f^{-1}(z) = \begin{cases} z & ; \quad f(x) \neq z, \\ f(y) & ; \quad f(x) = (z), \end{cases}$$

y

$$\delta_{f(x)}^{f(y)}(z) = \begin{cases} z & ; \quad f(x) \neq z, \\ f(y) & ; \quad f(x) = (z), \end{cases}$$

de donde  $\hat{F}(\delta_x^y(z)) = \delta_{f(x)}^{f(y)}(z)$ , luego por inducción se tiene:

$$\hat{F}^n(\delta_x^y(z)) = \delta_{f^n(x)}^{f^n(y)}(z).$$

Solo resta mostrar que:

Si  $y \in W_\epsilon^s(x, f)$ , entonces la función  $\delta_x^y \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$ . Para esto se tiene:

$$\begin{aligned} d(\hat{F}^n(\delta_x^y), \text{inc}(\Lambda)) &= \sup_{z \in \Lambda} d(\hat{F}^n(\delta_x^y(z)), \text{inc}(\Lambda)(z)) \\ &= \sup_{z \in \Lambda} d(\delta_{f^n(x)}^{f^n(y)}(z), z) \\ &= d(f^n(y), f^n(x)). \end{aligned}$$

Ahora como,  $y \in W_\epsilon^s(x, f)$ ,  $d(f^n(y), f^n(x)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  se tiene que  $d(\hat{F}^n(\delta_x^y), \text{inc}(\Lambda)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ .



Es decir,  $\delta_x^y \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})$ .

Por lo tanto  $y \in \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\}$ . De (a) y (b) se tiene que:

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{h(x) : h \in W_\epsilon^s(\text{inc}(\Lambda), \hat{F})\},$$

o en cartas exponenciales

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{\exp_x \sigma(x) : \sigma \in W_\epsilon^s(\tilde{0}, \tilde{F})\}.$$

□

### 3. Resultado

#### 3.1. Variedad estable local para un conjunto hiperbólico

Esta sección está dedicada a probar el teorema 1.1. Para esto tenemos los siguientes resultados previos.

**Lema 3.1.** *Existe una aplicación fibrado<sup>3</sup> continua  $\mu$  de clase  $C^r$  sobre cada fibra tal que la imagen de una sección  $\sigma$  en  $\Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s)$  bajo la aplicación  $\psi$  que define  $\tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F})$  puede ser escrita como  $\psi(\sigma) = \mu \circ \sigma$ .*

El diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_\eta^s & \xrightarrow{\mu} & E_\eta^u \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow{id} & \Lambda \end{array}$$

conmuta.

Más aún, la restricción de  $\mu$  en cada fibra sobre  $x$  con sus derivadas hasta de orden  $r$ , dependen continuamente de  $x$ .

DEMOSTRACIÓN. La condición que  $\psi(\sigma) = \mu \circ \sigma$  implica en particular que el valor de  $\psi(\sigma)$  en  $x$  depende únicamente de  $\sigma(x)$  y no de los valores de  $\sigma$  en otros lugares.

Sean  $x \in \Lambda$ , y  $\sigma_1, \sigma_2$  dos secciones en  $\Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s)$  tal que  $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ ; se probará que  $\psi(\sigma_1)(x) = \psi(\sigma_2)(x)$ .

En efecto, se asume que  $\psi(\sigma_1)(x) \neq \psi(\sigma_2)(x)$ .

Como  $[\sigma_1, \psi(\sigma_1)]$  y  $[\sigma_2, \psi(\sigma_2)]$  pertenecen a  $\tilde{W}_\eta^s(\tilde{0}, \tilde{F})$ , se tiene

$$\tilde{F}^n(\sigma_1, \psi(\sigma_1)) \rightarrow \tilde{0}, \quad \tilde{F}^n(\sigma_2, \psi(\sigma_2)) \rightarrow \tilde{0}$$

cuando  $n \rightarrow +\infty$ , (esto es definición de variedad estable para  $\tilde{0}$ , vista como el gráfico de la función  $\psi$ ). Ahora se define la función acotada,  $\tau \in \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^u)$ , definida por:

$$\begin{aligned} \tau(y) &= \psi(\sigma_1)(y) \quad \text{para } y \neq x \\ \tau(x) &= \psi(\sigma_2)(x). \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Una aplicación fibrado es una aplicación  $\mu : (E_1, \pi_1, B_1) \rightarrow (E_2, \pi_2, B_2)$ , donde  $(E_i, \pi_i, B_i)$  son fibrados vectoriales para cada  $i = 1, 2$ .

De la definición de  $\tau$  se tiene que  $\tilde{F}(\sigma_1, \tau) \rightarrow \tilde{0}$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , puesto que  $\psi(\sigma_1)(x) \neq \psi(\sigma_2)(x)$  entonces  $\tau \neq \psi(\sigma_1)$ , solo resta probar que  $d(\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau), \tilde{0})$  porque si se tuviera esto, se habría encontrado otra sección del fibrado inestable tal que  $\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau) \in B'_\eta(\tilde{0})$  y esto contradice (1).

En efecto:

$$\begin{aligned} d(\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau), \tilde{0}) &= \sup_{z \in \Lambda} d(\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau)(z), \tilde{0}_z) \\ &= \sup_{z \in \Lambda} \|\exp_z^{-1}[f^n(\exp_{f^{-n}(z)}(\sigma_1, \tau)(f^{-n}(z)))]\| \\ &= \max \left\{ \sup_{\substack{z \in \Lambda \\ z \neq f^{-n}(x)}} \|\exp_z^{-1}[f^n(\exp_{f^{-n}(z)}(\sigma_1, \psi(\sigma_1))(f^{-n}(z)))]\|, \right. \\ &\quad \left. \|\exp_{f^n(x)}^{-1}[f^n(\exp_x(\sigma_2, \psi(\sigma_2))(x))]\| \right\} \\ &\leq \max\{d(\tilde{F}^n(\sigma_1, \psi(\sigma_1)), \tilde{0}), d(\tilde{F}^n(\sigma_2, \psi(\sigma_2)), \tilde{0})\}. \end{aligned}$$

la última expresión tiende a cero, cuando  $n \rightarrow +\infty$ , lo que demuestra que al reemplazar  $\psi(\sigma_1)(x)$  por  $\psi(\sigma_2)(x)$ , se tiene que  $\tilde{F}^n(\sigma_1, \tau)$  sigue convergiendo uniformemente a la sección cero. Esto es  $\psi(\sigma_1)(x) = \psi(\sigma_2)(x)$ , lo que prueba que  $\psi(\sigma)(x)$  solo depende de  $\sigma(x)$ .

Ahora es posible definir la función  $\mu : E_\eta^s \rightarrow E_\eta^u$  por  $\mu(v) = \psi(\delta_x^v)(x)$ , donde  $\delta_x^v$  es la sección dada por  $\delta_x^v(x) = v$ ,  $\delta_x^v(z) = 0_z$  para  $z \neq x$ . Es decir  $\mu$  es definida por la siguiente composición

$$E_x^s \longrightarrow \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s) \xrightarrow{\psi} \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^u) \xrightarrow{ev_x} E_x^u,$$

$$v \longmapsto \delta_x^v \longmapsto \psi(\delta_x^v) \longmapsto \psi(\delta_x^v)(x) = \mu(v).$$

Esta definición garantiza que  $\mu$  preserva las fibras de  $E_\eta^s$ . Además,  $\mu$  es inducida por la función por la aplicación  $\psi : \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^s) \rightarrow \Gamma_\eta^b(\Lambda, E^u)$  la cual es de clase  $C^r$ , por lo tanto la restricción de  $\mu$  a la fibra de  $E_\eta^s$  sobre  $x$ ,  $\mu_x$ , es de clase  $C^r$ .

Solo resta probar que  $\mu_x$  depende continuamente de  $x$  en la topología  $C^r$ , lo cual no es inmediato ya que se ha considerado secciones acotadas sin tener en cuenta una topología para  $\Lambda$ .

Para probar la continuidad es suficiente probar que  $\mu$  induce una función de clase  $C^r$  del espacio de secciones continuas  $\Gamma_\eta^0(\Lambda, E^u)$ .

Como se recuerda el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} C^0(\Lambda, M) & \xrightarrow{\hat{F}} & C^0(\Lambda, M) \\ \text{inclusión} \downarrow & & \downarrow \text{inclusión} \\ B(\Lambda, M) & \xrightarrow{\hat{F}} & B(\Lambda, M) \end{array} .$$

La inclusión  $inc(\Lambda)$  es un punto fijo hiperbólico para la función

$$\hat{F} : C^0(\Lambda, M) \rightarrow C^0(\Lambda, M).$$

Es posible, al trabajar con cartas, producir la variedad estable de  $inc(\Lambda)$  como el gráfico de la función

$$\psi' : \Gamma_{\eta}^0(\Lambda, E^s) \rightarrow \Gamma_{\eta}^0(\Lambda, E^u).$$

Esta función  $\psi'$  es de clase  $C^r$  y debería ser la restricción de  $\psi$  a  $\Gamma_{\eta}^0(\Lambda, E^s)$ , desde que la variedad estable de 0 en  $\Gamma_{\eta}^0(\Lambda, M)$  es el gráfico de  $\psi$ .

Así  $\psi'(\sigma) = \mu \circ \sigma$  y se observa que la función  $\mu_x$  y todas sus derivadas hasta de orden  $r$  dependen continuamente de  $x$ .  $\square$

## Demostración del teorema 1.1

*Demostración.* Se tiene

$$W_{\epsilon}^s(x, b) = \{exp_x(\gamma(x)) : \gamma \in W_{\epsilon}^s(\tilde{0}, \tilde{F})\} \subset \tilde{W}_{\eta}^s(x, b),$$

donde

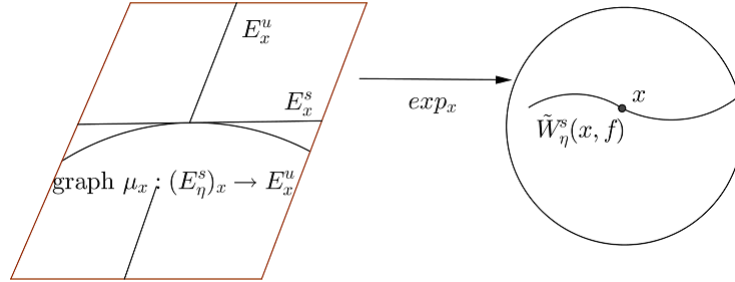
$$\tilde{W}_{\eta}^s(x, b) = \{exp_x[v, \mu(v)] : v \in E_x^s, \|v\| < \eta\}$$

o de manera equivalente

$$\tilde{W}_{\eta}^s(x, b) = \{exp_x(\text{graph } \mu_x \subset T_x M)\}.$$

Desde que la restricción de  $\mu$  a cada fibra es  $C^r$  y además  $exp_x$  es un difeomorfismo local, entonces  $\tilde{W}_{\eta}^s(x, b)$  es un disco embebido alrededor de  $x$  de dimensión igual a la dimensión de  $E_x^s$  (ver figura 4).

Figura 4: Aplicación exponencial



Desde que  $\psi(\tilde{0}) = \tilde{0}$ , se tiene que:  $\mu \circ \tilde{0} = \tilde{\psi}(\tilde{0}) = \tilde{0}$ , entonces  $\mu(0_{E_x^s}) = 0_{E_x^u}$ .

Desde que el gráfico de  $\psi$ ,  $\{(\sigma, \psi(\sigma)) : \sigma \in \Gamma_{\epsilon}^b(\Lambda, E^s)\}$ , es tangente a  $\Gamma_{\epsilon}^b(\Lambda, E^s)$  en  $\tilde{0}$ , el gráfico de la restricción de  $\mu$  a la fibra sobre  $x$ ,  $\{(v, \mu(v)) : v \in E_x^s, \|v\| \leq \eta\}$  es tangente a  $E_x^s$  en el origen del espacio tangente a  $M$  en  $x$ . Por lo tanto

$$T_x(\tilde{W}_{\eta}^s(x, f)) = E_x^s. \quad (2)$$

Sea la función

$$\begin{aligned} \text{graph } \mu : \Lambda &\rightarrow \text{Emb}(D^s, M) \\ x &\mapsto \exp_x[\text{graph } \mu_x], \end{aligned}$$

donde  $s = \dim E_x^s$ . Esta función está definida localmente por las cartas del fibrado  $E^s$  y es continua.

Descompongamos esta función.

Sea  $C_x : D_\eta^s \rightarrow (E_\eta^s)_x$  la carta trivializante del fibrado en una vecindad de  $x$ . Además sea la función

$$\begin{aligned} p_x : D_\eta^s &\rightarrow M \\ y &\rightarrow \exp_x[C_x(y), \mu \circ C_x(y)]. \end{aligned}$$

(No olvidar reescalar via la función  $sc : D_1^s \rightarrow D_\eta^s$ .) La función  $\text{graph } \mu$  está definida localmente por  $(\text{graph } \mu)x = p_x \circ sc$  y es continua.

Por lo tanto  $\tilde{W}_\eta^s(x, f)$  es un disco  $C^r$  que depende continuamente sobre  $x$  en la topología  $C^r$ .

Ahora se mostrará que  $W_\epsilon^s(x, f)$  es un disco de la misma dimensión que  $\tilde{W}_\eta^s(x, f)$  y que varía continuamente sobre  $x$ .

En efecto: Como  $T_x(\tilde{W}_\eta^s(x, f)) = E_x^s$  (ver ecuación (2)) se tiene que:

$$\|T_x(\tilde{W}_\eta^s(x, f))\| = \|T_x f|_{\tilde{W}_\eta^s(x, f)}\| = \|E_x^s\| < \lambda \Rightarrow \|T_x f|_{\tilde{W}_\eta^s(x, f)}\| < \lambda.$$

Así se tiene que para  $\epsilon$  suficientemente pequeño se cumple la siguiente implicación:

Si  $y \in \tilde{W}_\eta^s(x, f)$  y  $d(x, y) \leq \epsilon$ , entonces  $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ .

Esta afirmación es verdadera ya que  $\tilde{W}_\eta^s(x, f)$  varía continuamente con respecto a  $x$ , es más  $\epsilon$  puede ser tomado independientemente de  $x$  ya que  $\Lambda$  es compacto.

Con esto se tiene:

$$W_\epsilon^s(x, f) = \{y \in \tilde{W}_\eta^s(x, f) : d(y, x) \leq \epsilon\} = \tilde{W}_\eta^s(x, b) \cap B_\epsilon(x).$$

Ahora si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño

$$\tilde{W}_\eta^s(x, b) \cap B_\epsilon(x)$$

es un disco y el teorema de isotopía de Thom (ver la sección 8 del libro [1], también Apéndice 2 de [3]) muestra que este depende continuamente  $C^r$  de  $x$ .  $\square$

## 4. Conclusiones y sugerencias

### 4.1. Conclusiones

Es posible generalizar el concepto de punto hiperbólico a conjunto hiperbólico.

El conjunto variedad estable asociado a un conjunto hiperbólico, es en efecto una variedad diferenciable tan suave como la función que le sa su origen.

### 4.2. Sugerencias

Se sugiere hacer el cálculo de variedades estables para conjuntos hiperbólicos particulares.

## Referencias

- [1] HIRSCH, MORRIS W. *Differential topology* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [2] MENDOZA, JOEL *Construcción de una herradura con medida de Lebesgue positiva*. 2016 ENTRE LETRAS Y NÚMEROS. Pontificia Universidad Católica del Perú- Universidad San Ignacio de Loyola. Lima-Perú.
- [3] MENDOZA, JOEL *Hiperbolicidad en variedades de dimensión infinita* Tesis de licenciatura 2016 Universidad Nacional Pedro Ruiz gallo Lambayeque-Perú.
- [4] PETERSEN, PETER *Riemannian geometry* Springer-Verlag, New York, 1998. *Bull. Sci. Math* **128** (2004) 7–22.
- [5] ROBINSON, CLARK *Dynamical systems: Stability, symbolic dynamics, and chaos* CRC Press, Boca Raton, FL 1999.
- [6] SHUB, MICHAEL *Global stability of dynamical systems* Springer-Verlag, New York, 1987.